

# L'HISTOIRE DES NOMBRES

## I- Généralité :

Les premières traces laissées par l'homme illustrant l'acte de **compter** remontent à plus de 30 000 ans.

Des chercheurs ont retrouvé des **os entaillés** permettant, **par exemple**, de compter les animaux d'un troupeau : une entaille correspond à un animal.

Ce système permettait de savoir si toutes les bêtes étaient présentes, mais sans en connaître le nombre exact. Les hommes ont aussi utilisé, de manière analogue, des cailloux ou des nœuds sur une corde. Mais cette méthode a des inconvénients : en particulier, il est difficile de représenter de **grands nombres**.

Cet inconvénient est surmonté vers 8000 avant J.-C., au **Moyen-Orient**, grâce à une idée très simple : **il suffit de remplacer un tas de cailloux par un caillou différent**. Un gros caillou peut **par exemple** représenter 60 petits cailloux. Ainsi, 3 gros cailloux et 5 petits correspondent au nombre  $3 \times 60 + 5 = 185$ . Avec 8 cailloux, on peut donc représenter le nombre 185, alors qu'il en faudrait 185 avec la méthode précédente. Le mot « **caillou** » se dit d'ailleurs *calculus* en latin : c'est de cette méthode que vient le mot « **calcul** ».

Pour mémoriser les nombres, l'homme a bien sûr aussi utilisé son corps, à commencer par ses **doigts**. Cependant, toutes ces méthodes possèdent un défaut : on en garde difficilement une trace dans le temps.

## 2- Origine de l'écriture des nombres :

Ce n'est qu'au III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., en **Mésopotamie**, qu'apparaît **le premier système d'écriture des nombres** : il s'agit d'inscrire des encoches dans de l'argile encore fraîche pour représenter les nombres. Avec seulement 6 signes différents, on peut écrire n'importe quel nombre.

Par la suite, de nombreux peuples inventent leur propre système d'écriture des nombres que l'on appelle **numération**. Les numérations romaine et égyptienne sont les plus connues.

Le système d'écriture des nombres que l'on utilise actuellement a été inventé en **Inde** vers le V<sup>e</sup> siècle. Puis, par l'intermédiaire des mathématiciens arabes, cette numération est arrivée en Europe à partir du XIII<sup>e</sup> siècle, et a remplacé la numération romaine environ deux siècles plus tard. C'est pourquoi les chiffres que nous utilisons (1, 2, 3,...) sont appelés les **chiffres arabes ou indo-arabes**.

Notre numération est une **numération de position** : cela signifie que la place du chiffre dans le nombre indique sa valeur. **Par exemple**, dans le nombre **21 562**, le **2** du début et celui de la fin n'ont pas la même valeur.

On dit que c'est un **système décimal** ou **de base 10**, car on utilise **dix chiffres pour écrire tous les nombres** (le fait que nous ayons dix doigts aux mains n'est sans doute pas étranger à cela). D'autres bases sont fréquemment utilisées de nos jours, comme la **base 2 en informatique par exemple**. Dans ce système appelé **binaire**, on utilise uniquement les **chiffres 0 et 1** pour représenter tous les nombres (le nombre **13** s'écrit **1101** en base 2).

Ce n'est qu'au **XVII<sup>e</sup> siècle** qu'est apparue la **virgule** pour écrire des nombres qui ne sont pas entiers. Autrefois, le nombre **13,1** s'écrivait **13□**. C'est le mathématicien hollandais **Willebrord Snell** qui a inventé ce système d'écriture des nombres à virgule, qui facilite grandement les calculs et qui a été vite repris par l'ensemble des mathématiciens.

## II- Nombre d'Or :

### 1- Définition :

Parmi tous les rectangles, certains nous semblent plus beaux que d'autres. Ils ont dans la majorité des cas la même **proportion**. Ces rectangles s'appellent des rectangles d'or et le **rapport de leur longueur par leur largeur** s'appelle le **nombre d'or**.

On note en général le nombre d'or par la lettre grecque  $\phi$  (phi). Cette notation est apparue en 1914 en hommage à **Phidias**, un sculpteur qui a décoré le Parthénon à Athènes.

### (croquis d'un rectangle d'or)

Le nombre d'or apparaît aussi dans d'autres figures géométriques comme le **pentagone régulier**, qui est une figure géométrique à cinq côtés inscrit dans un cercle et dont tous les côtés et tous les angles ont les mêmes mesures. Dans cette figure, le rapport d'une diagonale par un côté donne le nombre d'or.

Le nombre d'or a pour valeur exacte  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et pour en trouver une valeur approchée, on peut utiliser une calculatrice.  $\phi$  vaut à peu près **1,618** mais ses décimales (c'est-à-dire le nombre de chiffres après la virgule) sont infinies et impossibles à prévoir.

On peut aussi se servir de la **suite de Fibonacci** pour approcher le nombre d'or. Cette suite a été inventée au Moyen Âge par le mathématicien italien **Léonard de Pise** dit **Fibonacci**, pour étudier la reproduction des lapins.

Les deux premiers nombres de cette suite sont **1**. Pour trouver les différents termes de la suite, on additionne les deux précédents. On obtient donc les nombres :

En divisant chaque terme de cette suite par le précédent (à partir du deuxième 1), on se rapproche du nombre d'or :

Enfin, en utilisant la formule suivante, on trouvera également une valeur approchée de  $\phi$  :

## 2- Utilité du nombre d'or :

Le nombre d'or est probablement connu depuis la préhistoire. Il a été utilisé par de nombreux architectes et artistes depuis l'Antiquité. La **pyramide de Khéops** en Égypte, construite vers **2800 avant J.-C.** montre que son architecte a utilisé le nombre d'or et il en est de même pour le **Parthénon** à Athènes, construit au **V<sup>e</sup> siècle avant J.-C.**

À la Renaissance, de nombreux peintres (comme **Piero della Francesca** ou **Léonard de Vinci**) utilisent les qualités esthétiques liées au nombre d'or dans leurs tableaux. Léonard de Vinci illustre même un livre sur les propriétés mathématiques, esthétiques et mystiques du nombre d'or ; ce livre, écrit par le moine italien **Fra Luca Pacioli**, est intitulé **De divina proportione** (« la divine proportion »).

Le nombre d'or apparaît même dans le domaine de la musique puisque le luthier italien **Antonio Stradivari** (dit **Stradivarius**) utilise lui aussi ce nombre pour construire ses fameux **violons** à la fin du **XVII<sup>e</sup> siècle**.

Au **XX<sup>e</sup> siècle**, de nombreux architectes et peintres s'intéressent encore au nombre d'or pour leurs réalisations, en particulier l'architecte français **Le Corbusier** et le peintre espagnol **Salvador Dalí**.

## 3- Propriété du nombre d'or :

En plus de ses qualités esthétiques, le nombre d'or possède une propriété algébrique intéressante puisque pour trouver son carré (c'est à dire  $\phi \times \phi$ ) il faut lui ajouter **1**. Autrement dit :  $\phi \times \phi = \phi + 1$ . C'est ainsi qu'on définit en général le nombre d'or.

Une autre propriété qui découle de la précédente est que pour trouver son inverse, on lui retranche **1**, donc :

Le nombre d'or apparaît dans de nombreuses réalisations humaines, mais aussi, mystérieusement parfois, dans la nature.

S'il n'est pas étonnant de retrouver le nombre d'or chez l'**étoile de mer** qui a une forme de pentagone croisé, on peut être surpris de le voir apparaître dans une **coquille d'escargot**, dans une **fleur de tournesol** ou dans une **écaille de pomme de pin**. Il paraît même que le rapport de la hauteur totale du corps humain à la hauteur du nombril équivaut au nombre d'or !

### III- Zéro :

#### 1- Définition :

Le **zéro** est à la fois un chiffre (l'absence d'unité) et un nombre (la quantité nulle). Difficile à imaginer, il est apparu tard dans l'histoire des mathématiques.

- En tant que **chiffre**, zéro indique, dans notre système d'écriture des nombres (ou système de numération), l'absence d'unité, de dizaine, de centaine, etc. C'est lui qui permet de différencier 231 de 2031 et de 2301. Il est apparu bien après tous les autres chiffres.

- En tant que **nombre**, en tant que quantité, zéro est le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même ( $1 - 1 = 0$ ). Lorsqu'il n'y a plus de nuage, on peut dire qu'il y a zéro nuage.

#### 2- Origine :

Les premières traces d'utilisation d'un zéro remontent au **III<sup>e</sup> siècle avant J.-C.**, à **Babylone** (l'une des plus importantes villes de l'Antiquité, située au sud de Bagdad, en Irak).

Ce premier zéro ne représente pas une quantité, mais il permet d'écrire les nombres (utilisation en tant que chiffre). Les Babyloniens utilisent deux symboles uniquement pour écrire les nombres : un clou et un chevron. Une sorte de double clou incliné permet de séparer les chiffres pour éviter les confusions.

La deuxième apparition du chiffre zéro est découverte dans le **système de numération** des **Mayas**, vers l'**an 50**. Ceux-ci représentent le chiffre zéro en dessinant une **coquille d'escargot** ou un **coquillage**.

Vers le **V<sup>e</sup> siècle**, les **Indiens** sont les premiers à utiliser le zéro comme chiffre et comme quantité. Ils le symbolisent par un **petit cercle**.

Du symbole à son appellation actuelle, le nombre « **zéro** » a changé plusieurs fois de nom en un peu plus de **1 000 ans**. Vers le **V<sup>e</sup> siècle**, les Indiens l'appellent *sunya*, ce qui signifie le « vide ».

Traduit en arabe, *sunya* devient *sifr*. Arrivé en Italie, *sifr* devient *zephirum*. C'est le mot qu'utilise vers **1200** le mathématicien italien **Leonard de Pise**, dit **Fibonacci**, qui importe en Europe les chiffres arabes que l'on utilise aujourd'hui. Avant cela, on utilisait les chiffres romains qui n'étaient pas adaptés aux calculs ni à l'écriture des grands nombres. À partir de la fin du **XVI<sup>e</sup> siècle**, *zephirum* se transforme en *zefiro* qui donne finalement zéro.

### 3- Propriétés du zéro :

Le zéro a un comportement particulier avec les différentes opérations :

- on a vu qu'une définition du zéro est qu'il est égal à la différence d'un nombre par lui-même.

Autrement dit, pour tout nombre  $a$ , on peut écrire :  **$a - a = 0$**  ;

- si on ajoute zéro à un nombre, on obtient le nombre de départ. On dit que 0 est l'**élément neutre pour l'addition**. Donc :  **$a + 0 = a$**  ;

- tout nombre multiplié par zéro donne zéro. Ce nombre est dit **absorbant pour la multiplication**. Ainsi :  **$a \times 0 = 0$**  ;

- de plus, **la division par zéro est impossible**. Pour certains, c'est une définition de **l'infini**. On voit que le zéro représentant souvent le néant est lié à l'infini.

Le **zéro sépare les nombres positifs des nombres négatifs** (par exemple, sur l'échelle de température d'un thermomètre). Zéro est le **seul nombre à la fois positif et négatif**. Il sert aussi à comparer deux nombres : on dit que  **$a < b$  si  $a - b < 0$** .

## IV- L'Infini :

### 1- Définition :

La suite des entiers naturels (1, 2, 3, 4, etc.) comporte **des nombres très grands** : 10 millions, 300 000 milliards, etc.

Pourtant, on peut choisir un nombre aussi grand que l'on veut, si on lui ajoute 1, on trouvera toujours un nombre plus grand. On dit que cet ensemble est infini.

### 2- Notation :

L'infini se note par **un huit couché ( $\infty$ )**, appelé **lemniscate** en mathématiques.

Cette notation a d'abord représenté pour les Romains le nombre 1 000, puis un grand nombre. La notation en lemniscate a été utilisée la première fois en 1665 par le mathématicien **John Wallis** pour représenter l'infini.

### 3- Propriétés :

L'infini est intimement lié au **zéro**. La division par zéro est impossible : elle définit d'ailleurs pour certains l'infini.

Bien que l'infini ne soit pas à proprement parler un nombre, il existe tout de même des règles opératoires :

### 4- Origine :

Ce n'est qu'au **XIX<sup>e</sup> siècle**, grâce aux travaux du mathématicien allemand **Georg Cantor**, que l'on a pu donner un cadre mathématique satisfaisant à la notion d'infini.

La raison de ce travail tardif est que **l'infini a longtemps été chargé de sens religieux**. Au Moyen Âge, en Europe, la question de l'infini se trouve intimement liée à celle de Dieu. Pendant l'Antiquité, les Grecs avaient même évité de s'intéresser à l'infini car cela aurait pu remettre en question leur système de pensée.

Les mathématiciens grecs qui se sont intéressés à l'infini se sont trouvés confrontés à des paradoxes insurmontables, comme celui d'Achille et de la tortue énoncé par le philosophe et mathématicien grec **Zénon d'Élée** :

Achille décide de faire la course avec une tortue et de lui laisser de l'avance car elle est plus lente. Il la suit donc. Mais pendant qu'il avance à sa suite, celle-ci a avancé aussi. Il continue donc de la suivre, alors que la tortue continue elle aussi à avancer, même très peu. En raisonnant ainsi, Zénon affirme qu'Achille ne pourra jamais rattraper la tortue...

Les travaux de Cantor ont permis de montrer qu'il existe plusieurs types d'infinis.

L'infini dénombrable correspond aux infinis que l'on peut « compter » : les entiers naturels (1, 2, 3, etc.) sont infinis. Cantor démontre ainsi qu'il y a autant de nombres entiers que de nombres entiers pairs et que de fractions !

En revanche, il existe infiniment plus de points sur un segment que de nombres entiers alors que ces derniers sont infinis.

En fait, **il existe une infinité d'infinis différents.**

## **5- Utilité de l'infini :**

L'étude de l'infiniment grand est rattachée à celle de l'infiniment petit. Si l'étude de ces deux extrêmes a permis de faire des avancées impressionnantes dans tous les domaines scientifiques, en particulier en mathématiques, de nombreuses questions restent encore sans réponse en physique (**peut-on diviser à l'infini la matière ?**) ou encore en astronomie (**l'Univers est-il fini ou infini ?**).

Certains calculs d'**aires** et de **volumes** sont liés à ce que l'on appelle le **calcul infinitésimal**. Par exemple, pour calculer le volume d'une sphère, une méthode consiste à empiler des disques « infiniment fins » les uns sur les autres, puis à « additionner » les aires obtenues.